

### 第3节 四个常见条件的翻译 (★★★)

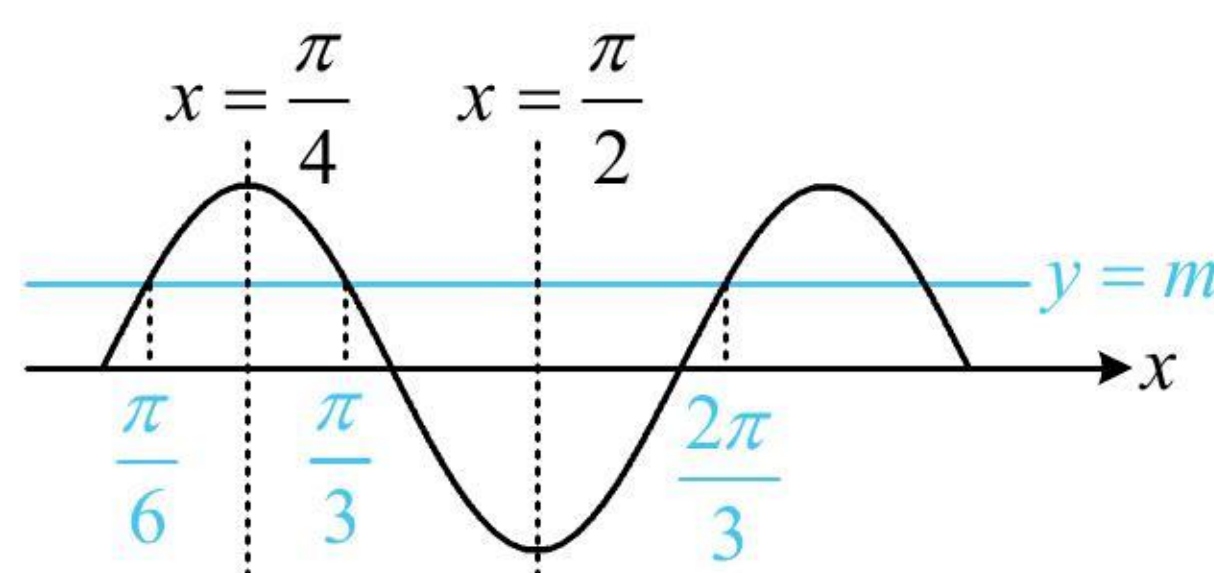
#### 强化训练

1. (2022·四川绵阳模拟·★★) 若  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象与直线  $y = m$  的三个相邻交点的横坐标分别是  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ , 则  $\omega =$  \_\_\_\_\_.

答案: 4

解析: 如图, 水平线与  $f(x)$  的图象的相邻两个交点的中间必定是对称轴,

由题意,  $x = \frac{\pi}{4}$  和  $x = \frac{\pi}{2}$  是相邻的两条对称轴, 所以  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 4$ .



2. (2023·安徽模拟·★★★) 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega$  为正整数,  $0 < \varphi < \pi$ ) 在区间  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$  上单调, 且  $f(\pi) = f(\frac{3\pi}{2})$ , 则  $\varphi =$  ( )

- (A)  $\frac{\pi}{6}$     (B)  $\frac{\pi}{4}$     (C)  $\frac{\pi}{3}$     (D)  $\frac{2\pi}{3}$

答案: B

解析:  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$  上单调怎样翻译? 可由内容提要 1 来推周期的范围, 进而得到  $\omega$  的范围,

$$f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{4}, \pi) \text{ 上单调} \Rightarrow \frac{T}{2} \geq \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T \geq \frac{3\pi}{2},$$

所以  $\omega = \frac{2\pi}{T} \leq \frac{4}{3}$ , 又  $\omega \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $\omega = 1$ , 故  $T = 2\pi$ , 且  $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ,

有了周期, 可看看  $\pi$  与  $\frac{3\pi}{2}$  之间是否小于一个周期. 若是, 则可由  $f(\pi) = f(\frac{3\pi}{2})$  来推断对称轴,

由  $T = 2\pi$  知  $\pi$  和  $\frac{3\pi}{2}$  之间小于一个周期, 又  $f(\pi) = f(\frac{3\pi}{2})$ , 所以  $x = \frac{5\pi}{4}$  是  $f(x)$  的对称轴,

从而  $\frac{5\pi}{4} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 故  $\varphi = k\pi - \frac{3\pi}{4}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 结合  $0 < \varphi < \pi$  可得  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

3. (★★★) 设函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减,  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$ , 若将函数  $f(x)$  图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍得到函数  $g(x)$  的图象, 则  $g(x) =$  \_\_\_\_\_.

答案:  $2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

解析: 由内容提要 1, 因为  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减, 所以  $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ , 故  $T \geq \frac{2\pi}{3}$ ,

条件中有  $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{6})$ , 且给了  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上单调, 可由此推断对称中心,

如图,  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  必为函数  $f(x)$  图象的一个对称中心,

还剩  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$  这个条件, 可由它推断对称轴,

如图,  $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$  的宽度小于一个周期, 所以  $x = \frac{7\pi}{12}$  为  $f(x)$  图象的一条对称轴,

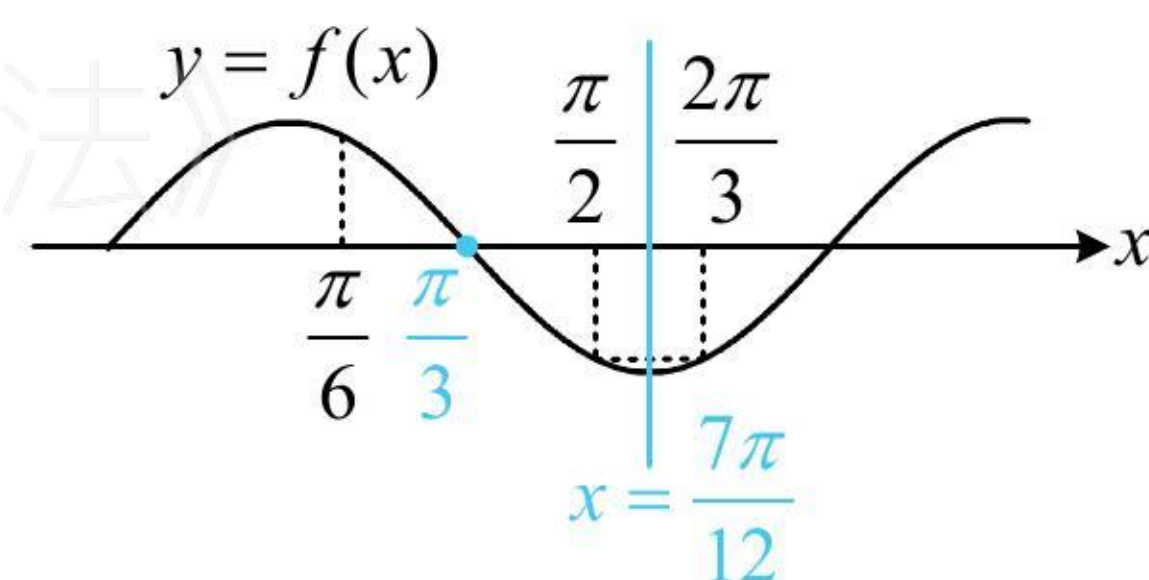
由图可知  $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ , 所以  $T = \pi$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ , 故  $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ,

还需求  $\varphi$ , 可代  $x = \frac{7\pi}{12}$  这个最小值点,  $f(\frac{7\pi}{12}) = 2\sin(2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi) = -2$ , 所以  $\sin(\frac{7\pi}{6} + \varphi) = -1$ ,

又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 从而  $\frac{2\pi}{3} < \frac{7\pi}{6} + \varphi < \frac{5\pi}{3}$ , 故  $\frac{7\pi}{6} + \varphi = \frac{3\pi}{2}$ , 解得:  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,

所以  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ , 由题意,  $g(x) = f(\frac{x}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ .

《一数·高考数学核心方法》



4. (2022·上海模拟·★★★★) 已知函数  $f(x) = \sin x + a \cos x$  满足  $f(x) \leq f(\frac{\pi}{6})$ , 若  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上单调,

且  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ , 则  $|x_1 + x_2|$  的最小值为 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{6}$     (B)  $\frac{\pi}{3}$     (C)  $\frac{2\pi}{3}$     (D)  $\frac{4\pi}{3}$

答案: C

解析:  $f(x) \leq f(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$  是  $f(x)$  的最大值点,

又  $f(x) = \sin x + a \cos x = \sqrt{1+a^2} \sin(x + \varphi)$ , 所以  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ ,

有了这两点, 就可以推断  $f(x)$  图象上的对称轴、对称中心这些关键信息了. 例如,  $x = \frac{\pi}{6}$  左侧的第一个对

称中心是  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ , 右侧的第一个对称中心是  $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ ,

如图, 因为  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上单调, 且  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ , 所以  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  处必为对称中心,

当 $|x_1 + x_2|$ 最小时， $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right|$ 也最小，所以只需找到横坐标绝对值最小的那个对称中心，

由图可知， $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 这个对称中心的横坐标的绝对值最小，所以 $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right|_{\min} = \frac{\pi}{3}$ ，故 $|x_1 + x_2|_{\min} = \frac{2\pi}{3}$ 。

